CONCOURS D'ADMISSION À L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1987

MATHÉMATIQUES

CONCOURS LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

DURÉE : 3 heures

Calculatrice électronique autorisée

L'usage d'une calculatrice électronique conforme à la réglementation est vivement recommandé.

EXERCICE N° 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. *a.* Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Calculer la fonction dérivée de f. Donner le tableau des variations de f. On précisera, en les justifiant, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

c. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité de longueur : 2 cm).

d. Pour $|x| > \frac{1}{2}$, calculer $f\left(-\frac{1}{2} - x\right) + f\left(-\frac{1}{2} + x\right)$. Que peut-on en déduire?

. *a.* Montrer que pour tout réel positif non nul x, $f(x)$ est égal à l'intégrale $\int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$.

b. A l'aide de l'inégalité de la moyenne, établir pour tout réel positif non nul x les inégalités $\frac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

c. n désignant un entier au moins égal à 2, montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \ln(n)$.

Utiliser alors les inégalités de la question précédente pour obtenir : $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

On choisit au hasard un entier de l'intervalle $[1, n]$ (tous les choix sont équiprobables). On appelle Z_n la variable aléatoire égale à l'inverse de l'entier choisi.

a. Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z_n.

b. Utiliser les inégalités de la partie précédente pour trouver un encadrement de cette espérance lorsque $n = 100$.

c. Quelle est la limite de l'espérance mathématique de Z_n lorsque n devient infini?
Déterminer un entier à partir duquel cette espérance est inférieure à 0,01.

EXERCICE N° 2

Dans un cabinet d'expertises automobiles, les voitures de cinq ans d'âge au moins sont classées par catégories :

— Catégorie 1 : Véhicule en parfait état.
— Catégorie 2 : Véhicule en état de marche.
— Catégorie 3 : Véhicule nécessitant, dès que possible, une remise en état.
— Catégorie 4 : Véhicule nécessitant immédiatement une remise en état.
— Catégorie 5 : Véhicule hors service.

Tournez la page S. V. P.

— 2 —

Un étudiant fait une enquête portant sur *100 voitures* expertisées dans ce cabinet; il désigne par x l'âge d'un véhicule, exprimé en années, et par y la catégorie dans laquelle est classé ce véhicule.

Il a calculé l'âge moyen des 100 véhicules expertisés $\bar{x} = 7{,}06$ et a reporté dans le tableau suivant les résultats obtenus :

y \ x	5	6	7	8	9	10
1	6	5	3	2	0	0
2	7	9	U	5	1	0
3	3	5	4	4	2	1
4	2	3	4	V	5	4
5	0	1	2	2	3	3

La première ligne indique les valeurs prises par le caractère x et la première colonne indique les valeurs prises par le caractère y.

On lit, par exemple, à l'intersection de la colonne $x=6$ et de la ligne $y=4$, l'effectif 3. C'est le nombre de véhicules de 6 ans d'âge rangés dans la catégorie 4.

Malheureusement ce tableau est incomplet, l'étudiant ayant oublié de reporter deux effectifs que l'on décide de noter pour l'instant U et V.

1. Exprimer le nombre total de véhicules expertisés en fonction de U et V.

2. Compléter les deux tableaux ci-dessous donnant respectivement le nombre n_i de véhicules ayant l'âge x_i, $x_i \in [5,10]$, et le nombre N_j de véhicules classés dans la catégorie y_j, $y_j \in [1,5]$. (Les nombres n_i et N_j seront exprimés éventuellement en fonction de U ou de V).

x_i	5	6	7	8	9	10
n_i						

y_j	1	2	3	4	5
N_j					

3. *a.* Exprimer l'âge moyen $\bar{x}$ d'un véhicule expertisé, en fonction de U et V.

b. En déduire que U et V sont solutions du système :

$$\begin{cases} U + V = 14 \\ 7U + 8V = 104 \end{cases}$$

Retrouver alors les valeurs de U et de V.

4. Déterminer la variance de x, la moyenne de y et la variance de y.

On donnera les valeurs exactes de ces paramètres en faisant apparaître tous les calculs et les formules permettant de les obtenir.

5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire qui lie les deux variables x et y. Le résultat sera arrondi à 0,01 près au plus proche, et on citera la formule utilisée.

• • •